第 29 卷第 11 期 西 南 大 学 学 报 (自然科学版) 2007年11月
Vol. 29 No. 11 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Nov. 2007

文章编号: 1673-9868(2007)11-0045-03

矩阵特征值的分布①

陈 经 纬

中国科学院 成都计算机应用研究所 自动推理室, 四川 成都 610041

摘要: 利用矩阵论的相关知识, 对任意的复矩阵得到了一个矩阵特征值分布的新区域(定理 1), 且所给出的矩形区域比以前的一些结果更好.

关 键 词: 矩阵; 特征值; 分布

中图分类号: O151. 21 文献标识码: A

向量空间的线性变换是与矩阵相互对应的, 但线性变换只有通过矩阵的特征值才会得以深刻理解. 而要求 n 阶方阵 A 的全部特征值是极其困难的, 因此人们转向了对特征值界的估计. 关于矩阵特征值分布区域问题, 有许多的数学工作者都做过这方面的工作[1-5]. 本文在这些前人们工作的基础上, 结合矩阵论的相关知识, 得到了一个矩阵特征值分布区域的新的结果.

首先给出两个引理.

引理 1 设 A 是 n 阶复方阵, 记 $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$, $C=\frac{1}{2i}(A-A^*)$, 又 x 是 A 属于特征值 λ_0 的特征向量. 则 $\mathrm{Re}\lambda_0=\frac{x^*Bx}{x^*x}$, $\mathrm{Im}\lambda_0=\frac{x^*Cx}{x^*x}$, 其中 $i^2=-1$, x^* 为 x 的共轭转置.

证 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是方阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量, 即 $Ax=\lambda_0 x$. 两端同时左乘 x^* 得到 $x^*Ax=\lambda_0 x^*x$, 再将此式两端同时取共轭转置, 得 $x^*A^*x=\overline{\lambda_0}x^*x$. 将这两个式子分别相加相减, 并分别乘以 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2i}$, 得到 $(\mathrm{Re}\lambda_0)x^*x=x^*Bx$, $(\mathrm{Im}\lambda_0)x^*x=x^*Cx$. 由于 x 作为特征向量, 有 $x\neq 0$, 从而得结论.

引理 2 (*Rayleig-Ritz*)[6] 设 A 是 n 阶 Hermite 阵. 将 A 的所有的特征值排列如下: $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$, 则

(1) 对任意的 $x\in C^n$, 有 $\lambda_1 x^*x\leq x^*Ax\leq\lambda_n x^*x$;

(2) $\lambda_1=\min\limits_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\min\limits_{x^*x=1}x^*Ax$;

(3) $\lambda_n=\max\limits_{x\neq 0}\frac{x^*Ax}{x^*x}=\max\limits_{x^*x=1}x^*Ax$.

证 可参考文献[6].

由以上的两个引理可以得到本文的主要结果.

定理 1 设 A 是 n 阶复方阵, 记 $B=\frac{1}{2}(A+A^*)$, $C=\frac{1}{2i}(A-A^*)$, 且方阵 B, C 的最小与最大特征值分别是 μ_1 与 μ_n, υ_1 与 υ_n. 则 A 的特征值 λ_0 满足 $\mu_1\leq\mathrm{Re}\lambda_0\leq\mu_n$, $\upsilon_1\leq\mathrm{Im}\lambda_0\leq\upsilon_n$.

证 设 $x\in C^n$ 是方阵 A 属于特征值 λ_0 的特征向量. 由引理 1 得到

---

① 收稿日期: 2007-04-28

作者简介: 陈经纬(1984-), 男, 四川巴中人, 硕士研究生, 主要从事符号与数值计算的研究.

$$\mathrm{Re}\lambda_0 = \frac{x^* Bx}{x^* x} \qquad \mathrm{Im}\lambda_0 = \frac{x^* Cx}{x^* x}$$

再由引理 2(1)，知道该定理成立.

引理 2 的(2) 和(3) 提供了一种理论上计算 μ_1 与 μ_n，υ_1 与 υ_n 的方法. 至于具体的估计，可以参阅相关文献，如[7]. 这样，我们便利用了矩阵论的相关知识，得到了一个关于矩阵特征值分布的新的区域，它包含了该矩阵的所有的特征值，且对任意的复方阵都成立. 这在处理某些问题时是十分有用的.

比如，由定理 1 容易得到

推论 1 斜 Hermite 阵与实斜对称阵的非零特征值是纯虚数.

证 设 K 为一个斜 Hermite 方阵，即 $K^* = -K$. 于是 $B = \frac{1}{2}(K + K^*) = 0$. 从而 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$，由定理 1 知，$K$ 的特征值 λ_0 满足 $0 = \mu_1 \leq \mathrm{Re}\lambda_0 \leq \mu_n = 0$，所以 $\mathrm{Re}\lambda_0 = 0$. 这就证明了斜 Hermite 阵的非零特征值是纯虚数.

对实斜对称方阵 S，证明完全相同.

推论 1 作为定理 1 在理论上的一个应用，可以看出定理 1 在处理有关涉及矩阵特征值实部和虚部的问题时是十分方便的. 现在进一步讨论定理 1 在实际计算中的应用，为此给出两个前人的定理.

定理 2(Hirsch)[1] 设 $A = (a_{kl})$ 是 n 阶复方阵，记 $B = \frac{1}{2}(A + A^*) = (b_{kl})$，$C = \frac{1}{2i}(A - A^*) = (c_{kl})$，$M_A = \max\{|a_{kl}| : 1 \leq k, l \leq n\}$. 若 λ_0 是 A 的特征值，则 $|\lambda_0| \leq nM_A$，$|\mathrm{Re}\lambda_0| \leq nM_B$，$|\mathrm{Im}\lambda_0| \leq nM_C$，其中 $i^2 = -1$，x^* 为 x 的共轭转置，M_B，M_C 的算法与 M_A 一样.

定理 3[5] 对任意的矩阵 $A \in C^{n\times n}$，A 的全体特征值属于圆盘

$$\left|\lambda - \frac{\mathrm{tr}A}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}\left(\|A\|_F^2 - \frac{1}{n}|\mathrm{tr}A|^2\right)}$$

其中 $\|A\|_F$ 表示 A 的 Frobenius 范数，$\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹.

以上两个定理的证明可参考文献[1,5].

推论 2 对任意的二阶实方阵，定理 1 的估计区域小于定理 3 的估计区域.

证 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$，由定理 3 知. A 的特征值 λ 满足

$$\left|\lambda - \frac{a+d}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 - 2ad} \qquad (*)$$

由定理 1 知道，A 的特征值 λ 落在复平面上由 $\left(\frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2bc - 2ad}}{2}, \pm\frac{1}{2}|b - c|\right)$ 四点围成的矩形区域. 将这四点坐标代入式(*)可知，该矩形是由式(*)所确定的圆盘的内接四边形，从而矩形估计区域更小.

最后，给出一个在实际计算中的应用.

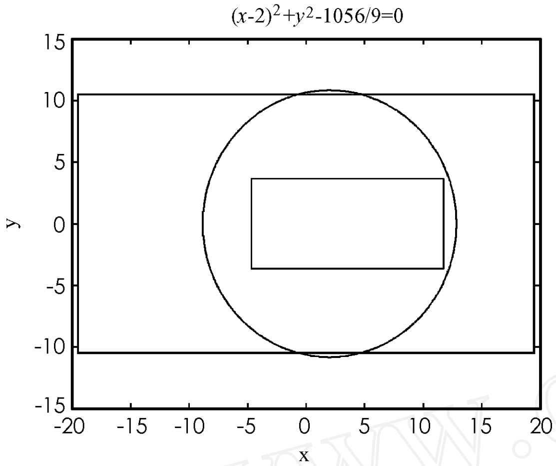
例 1[5]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

则
$$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & 3 & 5 \\ \frac{5}{2} & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2}i & \frac{1}{2}i \\ -\frac{7}{2}i & 0 & i \\ -\frac{1}{2}i & -i & 0 \end{pmatrix}$$

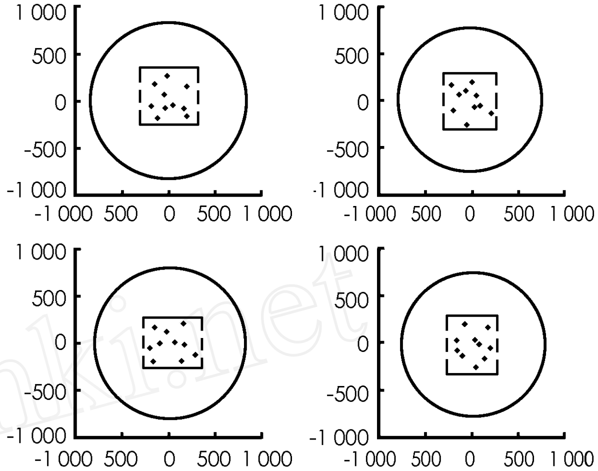
易求得 $\mu_1 = -4.698\,1$，$\mu_3 = 11.740\,6$，$\upsilon_1 = -3.674\,2$，$\upsilon_3 = 3.674\,2$，A 的特征值为 $\lambda_1 = 11$，$\lambda_2 = -2$，λ_3

$=-3$. 由定理 2 得到的估计范围是 $|\mathrm{Re}\lambda_i|\le 19.5$, $|\mathrm{Im}\lambda_i|\le 10.5$; 利用定理 3 可以得到 $|\lambda-2|\le\frac{\sqrt{1\,056}}{3}$; 由定理 1, 得到 $-4.698\,1\le\mathrm{Re}\lambda_i\le 11.740\,6$, $-3.674\,2\le\mathrm{Im}\lambda_i\le 3.674\,2$.



内框表示定理 1 的结果; 圆圈表示定理 2 的结果;
外框表示定理 3 的结果.

图 1　例 1 的估计效果图



点表示矩阵的特征值; 框表示定理 1 的结果;
圈表示定理 3 的效果.

图 2　随机产生的 10 阶复方阵特征值估计

利用 Matlab 作出图 1, 在参考文献[5]中已经指出, 将著名的圆盘定理, Ostrowski 卵形定理, Fan Ky 定理以及定理 3 等应用于上述例题, 定理 3 的估计效果更好. 由图 1 知, 与定理 3 的估计相比, 定理 1 的估计区域更小. 图 2 是笔者利用 Matlab 随机产生一组 10 阶方矩阵, 并利用定理 1 和定理 2 对其特征值的分布做出估计而得到的. 可以发现, 本文的结果是具有其优点的.

参考文献:

[1] 李炯生, 查建国. 线性代数 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1989.

[2] Pullman N J. Matrix Theory and Its Applications [M]. New York and Basel, MARCEL DEKKER, Inc, 1976.

[3] Fan Ky. Note on Circular Disks Containing the Eigenvalues of a Matrix [J]. Duke Math J, 1958, 25: 441 - 445.

[4] Feingold D G, Varga R S. Block Diagomally Dominant Matrices and Generalizations of the Gersgorin Circle Theorem [J]. Pacific J Math, 1962, 12: 1241 - 1250.

[5] 古以熹. 矩阵特征值的分布 [J]. 应用数学学报, 1994, 17(4): 501 - 511.

[6] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis [M]. Cambrige: Cambrige Univ, 1985.

[7] 但　琦. Hermite 矩阵最大(最小)特征值的估算 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2006, 31(6): 166 - 168.

The Distribution of Eigenvalues of a Matrix

CHEN Jing-wei

Laboratory for Automated Reasoning and Programming, Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Sciences, Chengdu Sichuan 610041, China

Abstract: In this paper, we have proved that all the eigenvalues λ_0 of any complex matrix $A\in C^{n\times n}$ satisfy $\mu_1\le\mathrm{Re}\lambda_0\le\mu_n$, $\upsilon_1\le\mathrm{Im}\lambda_0\le\upsilon_n$ (Theorem 1). The area of the rectangle is smaller than the area defined by the formulas of the same class and can be applied to whole complex matrices.

Key words: matrix; eigenvalue; distribution

责任编辑　汤振金